「言語空間と正規分布の考察」

□言語空間を数理的に解くには「統計」と「確率」は避けて通れない。…で、統計学で必ず現れてくるのが「正規分布」というお馴染みの分布だが、この「本質」はなかなか判りずらい。言語空間を定義する場合は、「存在性」や「一意性」、「直行性」など…を証明しておかなければならないのと同じく、正規分布にも証明しておかなければならないことがたくさんある。ここで東京図書出版の「正規分布」（牧野泰江＋石村貞夫共著）という本を参考に説明する。この本は数学者が厳密に正面から向かって導き出した経緯や証明などは一切無視しているところがおもしろい。指数関数 $f(x)=e^{x}$ というものもお馴染みですが、これをグラフにした図と y 軸と対称になる $f(x)=e^{-x}$ とを合成すると逆さだが少し正規分布の図に似てくる。なら両方の合成図を考えて $f(x)=e^{x^2}$ とすればもっと似てくる。これをグラフ化すればお分かりのように桶のような図になる。そこで、この桶を反対にすればどうか…と考え、$f(x)=e^{-x^2}$ とすれば、この図は非常に正規分布の図に似ている。ここでちょっと視点を変えて、この関数が確率分布なら全部の確率を足せば１になるはず。…というか、足して１にすれば確率密度関数になり、またこの関数を積分して面積が１になれば確率分布といえる。試しに x を－4 から+4 に設定し、$f(-4)$ から $f(4)$ までの面積を計算すると、1.772454 になる。これは $\sqrt{\pi}$ ≒1. 772454 と同じ（似ている？）なので、面積を１にするために、$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ とすれば確率分布になる。このようなやり方に抵抗を感ずる人も多々いると思うが、意外と数学ではこのような証明法や論理の展開を使っている。超有名な「ポアンカレ予想」を証明した Grigory Yakovlevich Perelman の論文や「フェルマーの最終定理」を証明した Andrew Wiles の論文などにも奇抜と言えるアイディアが駆使されている。ただ、Topology を使えばもっとスッキリとした証明があるかもしれない…が、それには斬新なアイディアがやはり必要である。話を戻そう…。すなわち、上記の式をキチンと積分をすれば $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ を掛ければ１になり確率分布になる…ということである。…ということは、ネイピア数の指数関数と円周率の平方根は積分という関係で同相であるという結論に至るが、これはどんな意味があるのか…皆さんの課題です。また、平均 μ は $\mu=\dfrac{1}{N}\sum_{i}^{N}x_i$ になり、分散は $\sigma^2=\dfrac{1}{N}\sum_{i}^{N}(x_i-\mu)^2$ であるので、上記 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ を変形して平均と分散（偏差 σ）を加味すれば、正規分布の式は

$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ になる。これもなんとなく肌に合わないやり方だという人もいるでしょう。ここでは離散も連続も混同した書き方をしているが簡単に理解するにはこれらがいちばん。もう少し説明すると、$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ は分散が $\sigma^2=\frac{1}{2}$ であるので、$\sqrt{\sigma^2}=\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$ になるので、これに $\sqrt{2}$ を掛けると、$1=\sqrt{2}\sigma$ というように変形ができる。それから上記 x を z に変えて $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ というような変換を標準化といいますが、これは上記分散の式 $\sigma^2=\frac{1}{2}$ を代入すると $x=\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2$ ということになり、上記の $1=\sqrt{2}\sigma$ も１だから掛けて（割っても）も同じなので、$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ という正規分布の式ができあがる。「１を掛けても割っても式は変わらない」ということを二度も使って証明しているが、これも…何となく肌に合いませんか。掛けても変わらないというのは、群とか環、体などにも関係がある交換律とか分配律とか加法や乗算という演算子がどのように定義されているか…という今後の考察内容にも発展していきます。いままでの説明をまとめると、正規分布の図に似た指数関数を確率分布の変数にし、標準正規分布にするために平均と分散を変数変換したのが上記の正規分布の式。だが、結果的に似たものから無理やりに導いたようで納得がいかない…とお思いでしょう。どのように導かれたのか、何故必要だったのか…が知りたい。答えは、「物事の事象、すなわち出来事が独立で起こるのであれば出来事の起こる確率が正規分布に順ずる。」ということになります。見えない何かで、この世界や宇宙は統一されている、守られている…ということでしょうか。もう少し数学的に、そして簡単に説明すると、$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ が成り立つことである。その証拠が有名な「中心極限定理」でデータ数 N を大きくすると $N(\mu,\frac{\sigma^2}{N})$ は正規分布に近づく。さて「独立」という言葉がでてくればこれも説明をしておかなければならない。数学はこのようにドンドン戻ってしまうことがよくあるので辛抱の学問です。「一次独立」という言葉があるが、これは従属ではないということである。ここでは「平均と分散が互いに独立である」ということを証明すれば良いので、

$k(\overline{X},S^2)=x(\overline{X})\cdot h(S^2)=\frac{\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{N}(x-\mu)}{\sigma})^2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{(N-1)s^2}{2\sigma^2}}$ を証明すれば良い。

…この後は、あまりにも長すぎるので前記著書を参照して下さい。確率変数を追加した変数変換や重積分分布関数間の同値関係、直行行列（$H^T=H^{-1}$）そして三角関数への変数変換と偏微分など…で証明が完結される。（第５版）

⇒ cTag＞意味位相空間ページへ